

文章编号: 1006-3080(2020)06-0838-05

DOI: 10.14135/j.cnki.1006-3080.20180531001

# 并行系统中排列图的可靠性近似算法

于中宝, 邵方明

(华东理工大学数学系, 上海 200237)

**摘要:** 讨论了排列图子图可靠性界的鲁棒性问题和可靠性的近似算法, 并构造了排列图的蒙特卡罗算法。仿真结果说明所构造的蒙特卡罗算法远优于已知的近似算法,  $A_{3,2}$  子图可靠性的蒙特卡罗近似计算误差小于 1%。

**关键词:** 可靠性; 排列图; 并行系统; 近似算法; 蒙特卡罗

**中图分类号:** O29

**文献标志码:** A

并行系统提供了高速的运算潜力, 但在高可靠性和容错性方面仍然存在问题, 其原因与并行系统的网络拓扑有关, 如超立方体, 星图和排列图等。系统的可靠性定义为系统没有故障的概率, 每个处理器正常运行的概率被记为  $p$ 。排列图具有高容错性、直径小和低节点度等特点, 因此进一步分析排列图的可靠性具有重要意义。

Lin 等<sup>[1]</sup> 定义了排列图  $A_{n,k}$  子图的可靠性, 并利用容斥原理给出了子图可靠性的上界以及子图可靠性的近似计算。Chiang 等<sup>[2]</sup> 给出了  $A_{n,k}$  的相关性质,  $A_{n,k}$  是  $k(n-k)$  正则图, 并且有  $n!/(n-k)!$  个节点, 同时得出  $A_{n,k}$  的直径为  $\lfloor 3k/2 \rfloor$ 。Cheng 等<sup>[3]</sup> 发现  $A_{n,k}$  中两个节点之间的最短路径算法, 该算法也可用于解决其他相关图的类似问题。此外, Feng 等<sup>[4]</sup> 发现最小故障边的边界使  $A_{n,k}$  的每个子图  $A_{n,k}^{n-m,k-m}$  失效: 当  $3 \leq k$  时,  $n + \lfloor n/k - 1 \rfloor \leq f_1(n, k) \leq 2n$ ; 当  $2 \leq m \leq k - 2$  时,  $\frac{n!}{(n-m)!} \leq f_n(n, k) \leq \binom{k}{m-1} \times \frac{n!}{(n-m)!} - 2 \binom{k-3}{m-1} \times \frac{n!}{(n-m+1)!}$ 。Yang 等<sup>[5]</sup> 也研究了排列图的容错性和可靠性。Cancela 等<sup>[6]</sup> 提出了组合特性来识别源点到终端直径受限的网络可靠性环境中的不相关边, 这产生了检测和消除网络不相关边的有效过程, 同时保持了可靠性。Zhang 等<sup>[7]</sup> 研究了网络物理系统的可靠性问题, 提出了  $k$ -可靠性模型来描述系统中至少有  $k$  个节点的连通性, 在随机情况下提高网络的可靠

性节点故障, 当不考虑体内信息时, 常规的分层分配策略比随机分层分配策略产生更强的可靠性; 在任何情况下, 双向互换分配策略比其子图和相应的单向分配策略具有更强的可靠性, 但排列图可靠性的近似值鲜有研究, 本文主要提出了排列图可靠性的蒙特卡罗近似算法, 并研究了可靠性界的鲁棒性问题。

## 1 排列图的相关性质

### 1.1 排列图 $A_{n,k}$ 的定义<sup>[2]</sup>

$n, k$  都是整数, 其中  $1 \leq k < n$ 。

(1) 点的定义: 从  $\{1, 2, \dots, n\}$  中取  $k$  个不同的整数得到排列  $a_1 a_2 \dots a_k$ , 其中  $a_i = a_j$  当且仅当  $i = j$ 。

(2) 边的定义: 排列图中的两点连接成边, 当且仅当点(排列)中对应位置只有一个不同, 比如节点  $a_1 \dots a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_k$  和  $a_1 \dots a_{i-1} b_i a_{i+1} \dots a_k$  的第  $i$  个位置不同, 则这两个节点之间有边, 其中  $1 \leq i \leq k$ 。图 1 中是以  $A_{4,2}$  为例说明了排列图、子图和节点。

### 1.2 排列图子图的定义

$A_{n,k}^{n-m,k-m}$  为对于节点的排列中固定了  $m$  个位置, 得到相应的子图。本文主要对  $m=1$  时的子系统可靠性进行研究。对于  $A_{n,k}$ , 有  $k$  种划分方式, 每个方式有  $n$  个互斥的子图  $A_{n,k}^{n-1,k-1}$ , 共有  $nk$  个不同的子图  $A_{n,k}^{n-1,k-1}$ 。以  $A_{4,2}$  为例,  $X_4$  表示  $A_{4,2}$  的一个子图。当

收稿日期: 2018-05-31

作者简介: 于中宝(1993—), 男, 安徽人, 硕士生, 研究方向为网络可靠性及其算法研究。E-mail: yuzhongbao@mail.ecust.edu.cn

通信联系人: 邵方明, E-mail: fmshao@ecust.edu.cn

引用本文: 于中宝, 邵方明. 并行系统中排列图的可靠性近似算法[J]. 华东理工大学学报(自然科学版), 2020, 46(6): 838-842.

Citation: YU Zhongbao, SHAO Fangming. Approximation Algorithm of Arrangement Graph Reliability in Parallel System[J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2020, 46(6): 838-842.

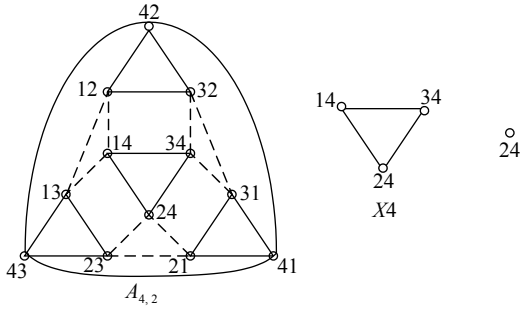


图 1 排列图  $A_{4,2}$ 、子图  $X4$ 、节点 24

Fig. 1 Arrangement graph  $A_{4,2}$ , subgraph  $X4$ , node 24

$m=1$  时, 对于  $A_{4,2}$ , 其中  $k=2$ 、 $A_{4,2}$  子图的划分有两种方式, 即固定第一个位置和固定第二个位置划分。如果固定第二个位置, 则有  $X1$ 、 $X2$ 、 $X3$ 、 $X4$  这 4 个互斥的子图  $A_{4,2}^{3,1}$ 。

## 2 排列图子图可靠性的近似计算

排列图子图可靠性的计算是一个 NP-hard 问题, 所以可以用排列图子图可靠性的界去衡量排列图子图可靠性。

文献 [1] 已经给出上界的计算

$$\begin{aligned}
 \overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}(p)} &= nk p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} - (C_k^1 C_n^2 p^2)^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} + \\
 &C_k^2 C_n^1 p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} + 2C_k^2 C_n^2 p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} - \frac{(n-2)!}{(n-k)!} + \\
 &C_k^1 C_n^3 p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} + C_k^3 C_n^1 p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} + \\
 &6C_k^3 C_n^3 p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!} - 3} \frac{(n-2)!}{(n-k)!} + \frac{(n-3)!}{(n-k)!} + \\
 &4C_k^2 C_n^2 p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!} - \frac{(n-2)!}{(n-k)!}} + \\
 &2(n+k-4)C_k^2 C_n^2 p^{\frac{(n-1)!}{(n-k)!} - 2} \frac{(n-2)!}{(n-k)!}
 \end{aligned} \tag{1}$$

根据容斥原理得:

$$\begin{aligned}
 R_{n,k}^{n-1,k-1}(p) &= P(A_{n,k}^1 \cup A_{n,k}^2 \cup \dots \cup A_{n,k}^{nk}) = \\
 &\sum_{i=1}^{nk} r_i(p) - \sum_{i<j} r_{(i,j)}(p) + \sum_{i<j<l} r_{(i,j,l)}(p) - \\
 &\sum_{i<j<l<q} r_{(i,j,l,q)}(p) + \dots + (-1)^{nk-1} r_{(i,j,\dots,nk)}(p) \geq \\
 &\sum_{i=1}^{nk} r_i(p) - \sum_{i<j} r_{(i,j)}(p) + \sum_{i<j<l} r_{(i,j,l)}(p) - \\
 &\sum_{i<j<l<q} r_{(i,j,l,q)}(p)
 \end{aligned}$$

将  $\sum_{i=1}^{nk} r_i(p) - \sum_{i<j} r_{(i,j)}(p) + \sum_{i<j<l} r_{(i,j,l)}(p) - \sum_{i<j<l<q} r_{(i,j,l,q)}(p)$  作为  $\underline{R_{n,k}^{n-1,k-1}(p)}$  的下界, 即:

$$\underline{R_{n,k}^{n-1,k-1}(p)} = \overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}(p)} - \sum_{i<j<l<q} r_{(i,j,l,q)}(p) \tag{2}$$

**算法 1:** 取排列图可靠性的上下界平均值作为其近似值, 即:

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{n,k}^{n-1,k-1}(p) &= 0.5(\overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}(p)} + \underline{R_{n,k}^{n-1,k-1}(p)})
 \end{aligned} \tag{3}$$

根据式 (1), 只需计算  $\sum_{i<j<l<q} r_{(i,j,l,q)}(p)$  即可得式 (3), 下面以例 1 进行说明。

**例 1:** 以  $A_{5,4}$  为例, 计算  $R_{5,4}^{4,3}$  的下界。根据下界的计算公式, 只需要分析  $\sum_{i<j<l<q} r_{(i,j,l,q)}(p)$ 。YXXX (因为  $n=5$ , 所以  $Y$  为 1、2、3、4、5 之间的任意一个数) 可以表示一个子图  $A_{5,4}^{4,3}$ ,  $Y$  也可以位于第二个位置  $XYXX$ , 对于  $A_{5,4}$ ,  $k=4$ , 所以存在 4 个位置。针对 4 个子图  $A_{5,4}^{4,3}$  的组合情况, 每个子图中有一个位置固定, 固定的位置上放置一个常数, 记为 symbol。则 4 个子图, 就会存在 4 个 symbol 放在四个固定的位置上。因为 4 个 symbol 最多分布在四个位置上, 所以存在 4 种分类: 4 个 symbol 分布在一个位置上、4 个 symbol 分布在两个位置上、4 个 symbol 分布在三个位置上和 4 个 symbol 分布在四个位置上。

(1) 一个位置: 因为从四个位置中选择一个位置放置 symbol, 所以位置的选择有  $C_4^1$  种。因为同一个位置放置 4 个 symbol, 而且表示 4 个不同的子图, 4 个 symbol 不能相同, 所以 symbol 的选择有  $C_5^4$  种。对于这样的一组  $A_{5,4}^{4,3}$ , 因为相同位置放置不同的 symbol, 所以它们之间是互斥的, 一共有  $4A_4^4$  个节点。(1XXX, 2XXX, 3XXX, 4XXX) 就表示这样放置 symbol 的一组  $A_{5,4}^{4,3}$ , 如图 2 所示。

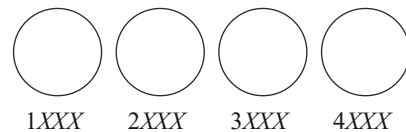


图 2  $A_{5,4}$  的一组子图  $A_{5,4}^{4,3}$   
Fig. 2 A subgraph  $A_{5,4}^{4,3}$  of  $A_{5,4}$

(2) 两个位置: 因为从四个位置中选择两个位置放置 symbol, 所以位置的选择有  $C_4^2$  种。因为将 4 个 symbol 放置在两个位置上, 有 3 种分法: (1, 3)、(2, 2) 和 (3, 1)。(1, 3) 表示取得的两个位置, 第一个位置放 1 个 symbol, 第二个位置放 3 个 symbol。(2, 2) 表示取得的两个位置, 第一个位置放 2 个 symbol, 第二个位置放 2 个 symbol, (3, 1) 表示取得两个位置, 第一个位置放 3 个 symbol, 第二个位置放 1 个 symbol, 其

所得结果和 (1, 3) 情况类似。

(3)三个位置: 因为从四个位置中选择三个位置放置 symbol, 所以位置的选择有  $C_4^3$  种。因为将 4 个 symbol 放置在三个位置上, 有三种分法: (1, 1, 2)、(1, 2, 1) 和 (2, 1, 1)。(1, 1, 2) 表示第一个位置放 1 个 symbol, 第二个位置放 2 个 symbol, 第三个位置放 2 个 symbol。由排列组合知这三种分法所得结果一样, 所以只对 (1, 1, 2) 讨论。

(4)四个位置: 因为从四个位置中选择四个位置放置 symbol, 所以位置的选择有  $C_4^4$  种, 有一种分法: (1, 1, 1, 1)。

和文献 [1] 类似得到  $\sum_{i < j < l < q} r_{(i,j,l,q)}(p)$  计算方法见

表 1, 其中  $k > 3$ 。通过表 1, 可得

$$\overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}}(p) = \overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}}(p) - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \quad (4)$$

表 1  $\sum_{i < j < l < q} r_{(i,j,l,q)}(p)$  的计算  
Table 1 Calculation of  $\sum_{i < j < l < q} r_{(i,j,l,q)}(p)$

Reliability			
One position	Two positions	Three positions	Four positions
$R_1 = C_k^1 C_n^1 p^{4A_{n-1}^{k-1}}$	$R_2 = C_k^2 (2C_n^1 C_{n-1}^2 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 2A_{n-2}^{k-2}} + 2C_n^1 C_{n-1}^3 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 3A_{n-2}^{k-2}} + 2C_n^2 C_{n-2}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 3A_{n-2}^{k-2}} + C_n^2 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 2A_{n-2}^{k-2}} + C_n^2 C_{n-2}^2 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 4A_{n-2}^{k-2}}$	$R_3 = C_k^3 (3C_n^1 C_{n-1}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 2A_{n-2}^{k-2}} + 3C_n^1 C_{n-1}^2 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 4A_{n-2}^{k-2}} + 6C_n^1 C_{n-1}^1 C_{n-2}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 4A_{n-2}^{k-2} + A_{n-3}^{k-3}} + 3C_n^1 C_{n-1}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 3A_{n-2}^{k-2}}$	$R_4 = C_k^4 (C_n^1 p^{4A_{n-1}^{k-1}} + 4C_n^1 C_{n-1}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 3A_{n-2}^{k-2}} + 3C_n^1 C_{n-1}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 4A_{n-2}^{k-2}} + 6C_n^1 C_{n-1}^1 C_{n-2}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 5A_{n-2}^{k-2} + 2A_{n-3}^{k-3}} + C_n^1 C_{n-1}^1 C_{n-2}^1 C_{n-3}^1 p^{4A_{n-1}^{k-1} - 6A_{n-2}^{k-2} + 4A_{n-3}^{k-3} - A_{n-4}^{k-4}}$

对于  $k=2$ , 取

$$\begin{cases} \overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}}(p) = \sum_{i=1}^{nk} r_i(p) - \sum_{i < j} r_{(i,j)}(p) \\ \overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}}(p) = \sum_{i=1}^{nk} r_i(p) \end{cases}$$

对于  $k=3$ , 取

$$\begin{cases} \overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}}(p) = \sum_{i=1}^{nk} r_i(p) - \sum_{i < j} r_{(i,j)}(p) + \sum_{i < j < l} r_{(i,j,l)}(p) \\ \overline{R_{n,k}^{n-1,k-1}}(p) = \sum_{i=1}^{nk} r_i(p) - \sum_{i < j} r_{(i,j)}(p) \end{cases}$$

对于  $R_{5,4}^{4,3}$ , 由式 (1)、(4) 得:

$$\begin{aligned} \overline{R_{5,4}^{4,3}}(p) &= 20p^{24} - 120p^{42} - 70p^{48} + 240p^{56} + \\ & 600p^{60} + 480p^{66} + 60p^{72} \\ \overline{R_{5,4}^{4,3}}(p) &= 20p^{24} - 120p^{42} - 70p^{48} + \\ & 240p^{56} + 600p^{60} + 480p^{66} - 120p^{67} - \\ & 1\ 080p^{70} - 540p^{72} - 1\ 440p^{74} - 920p^{78} - \\ & 660p^{84} - 25p^{96} \end{aligned}$$

对于  $\tilde{R}_{5,4}^{4,3}(p)$ , 据参考文献 [1] 取  $p=e^{-at}$ , 得到图 3。

由图 3 知, 如果用界的平均值去估算可靠性时, 会出现  $\tilde{R}_{5,4}^{4,3}(p) < 0$ , 我们称这种情况为鲁棒性, 即在某些时刻, 近似值没有意义。利用二分法找到了

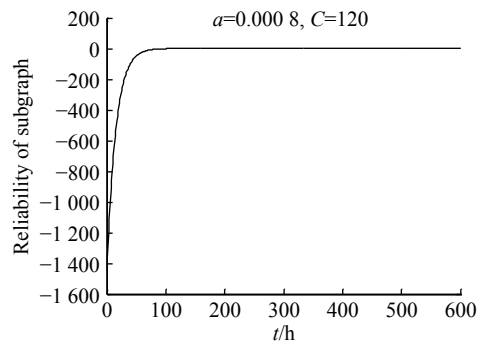


图 3 排列图  $A_{5,4}$  子图可靠性的近似计算

Fig. 3 Approximate calculations of subgraph reliability of  $A_{5,4}$

$\tilde{R}_{5,4}^{4,3}(p) = 0$  的近似时间节点, 当  $84.6019 < t$ ,  $\tilde{R}_{5,4}^{4,3}(p) < 0$ , 即当  $101.6125 < t$ ,  $\tilde{R}_{5,4}^{4,3}(p)$  没有意义。

针对鲁棒性的情况, 本文提出了基于排列图的子图可靠性的蒙特卡罗算法近似计算排列图的子图可靠性。

### 3 蒙特卡罗方法计算排列图子图的可靠性

#### 3.1 蒙特卡罗介绍

蒙特卡罗方法是以概率统计理论为指导的一种非常重要的数值方法, 它使用随机数解决许多计算问题:

(1)输入最小值、最大值和最可能的估算数据, 并为其选择合适的先验分布模型;

(2)根据以上输入, 采用一定的规则, 快速实施大量的随机抽样;

(3)对随机抽样的数据进行数学计算并处理结果;

(4)基于累积概率的分析, 对结果进行概率分析, 得出结论。

### 3.2 排列图子图的可靠性的蒙特卡罗近似计算

对于排列图  $A_{n,k}$ , 排列图子图的可靠性定义为: 当系统发生故障时, 仍然存在一个正常运行子图的概率。

利用蒙特卡罗方法对排列图子图的可靠性进行计算的一般过程如下:

#### 算法 2:

(1)已知排列图  $A_{n,k}$ , 输入循环次数  $N$ , 节点正常运行概率  $p$ , 计数器  $s=0$ ;

(2)对于第  $i$  次循环, 生成  $(0, 1)$  之间的  $n!/(n-k)!$  个随机数, 构成一个  $n!/(n-k)!$  维的向量  $\gamma_i$ ;

(3)每个节点正常运行的概率为  $p$ , 则失败的概率为  $q=1-p$ ; 若步骤 (2) 中向量  $\gamma_i$  的第  $j$  个随机数大于  $q$ , 记作对应的节点  $j$  正常运行, 状态变量记为 1, 否则记为 0, 得到状态向量  $\lambda_i$ ;

(4)根据步骤 (3) 中  $\lambda_i$  状态, 判断剩下正常运行的节点, 是否构成一个排列图子图, 如果构成一个排列图子图, 则  $s+=1$ , 否则  $s=s$ ;

(5)如果  $i \leq N, i+=1$ , 返步骤 (2); 否则, 返步骤 (6);

(6)可靠性为  $s/N$ 。

例 2: 以  $A_{3,2}$ (图 4) 为例, 对蒙特卡罗方法进行说明:

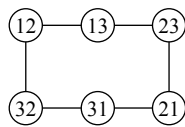


图 4 排列图  $A_{3,2}$

Fig. 4 Arrangement graph  $A_{3,2}$

利用容斥原理, 得到

$$R_{3,2}^{2,1}(p) = 6p^2 - (9p^4 + 6p^3) + (6p^4 + 12p^5 + 2p^6) - (6p^5 + 9p^6) + 6p^6 - p^6 = 6p^2 - 6p^3 - 3p^4 + 6p^5 - 2p^6$$

(1)输入循环次数  $N=100$ , 计数  $s=0, p=0.8, q=0.2$ ;

(2)随机生成一个 6 维的向量 (0.282 07, 0.136 92, 0.438 19, 0.526 09, 0.065 82, 0.207 75);

(3)生成状态向量 (1,0,1,1,0,1);

(4)存在正常运行的子图  $X2(12, 32)$  和  $2X(23, 21)$ , 则  $s+=1$ ;

通过仿真计算, 得到表 2。

通过表 2, 发现蒙特卡罗得到的误差不足 1%, 而且随着循环次数的增多, 误差越小。

表 2  $A_{3,2}$  的子图可靠性蒙特卡罗近似计算

Table 2 Approximate calculation of the Monte Carlo Method for  $A_{3,2}$  subgraph

Cycles	Monte Carlo error/%
100	0.218
500	0.185
1 000	0.084

## 4 实例验证

取  $p=0.85, N=1 000$ , 得到  $A_{n,k}$  子图可靠性的界以及近似计算的结果见表 3。

表 3 排列图  $A_{n,k}$  子图可靠性的界以及近似计算 ( $n=3,4,5,6,7; k=2,3,4$ )

Table 3 Bounds and the approximate calculation of subgraph reliability for  $A_{n,k}(n=3,4,5,6,7; k=2,3,4)$

$A_{n,k}$	Lower bound	Algorithm1	Ref[1]	Monte Carlo algorithm	Upper bound
$A_{3,2}$	-4.048	0.144	0.999 5	0.988	4.335
$A_{4,2}$	-6.446	-0.766	0.999 5	0.994	4.913
$A_{5,4}$	0.281	0.297	0.336	0.301	0.313
$A_{6,3}$	0.344	0.425	0.509	0.434	0.506
$A_{7,3}$	0.139	0.140	0.149	0.141	0.142

通过表 3 发现,  $A_{3,2}, A_{4,2}$  的上、下界出现了异常, 这就是鲁棒性问题。对于  $A_{5,4}, A_{6,3}, A_{7,3}$ , 文献 [1] 中的近似值都大于上界值, 而蒙特卡罗模拟的可靠性都在上、下界之间, 可见蒙特卡罗模拟的可靠性结果要优于已知算法。

取  $p=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  得到排列图  $A_{3,2}$  子图可靠性的近似解如表 4 所示, 结果表明算法 1 的近似计

表 4 排列图  $A_{3,2}$  子图可靠性的近似计算

Table 4 Approximate calculation of subgraph reliability for  $A_{3,2}$

$p$	Real value	Ref [1]	Monte Carlo
0.5	0.718 8	0.822	0.718
0.6	0.848 4	0.931 3	0.842
0.7	0.934 8	0.982 4	0.933
0.8	0.981	0.997 8	0.986
0.9	0.997 8	0.999 95	0.997

算会出现鲁棒性问题,已有近似计算的结果要大于真实值,利用蒙特卡罗得到近似结果和真实值基本重合。

## 5 结 论

本文主要研究了排列图子图的可靠性问题,提出了排列图子图的下界,在此基础上提出了算法 1:将上、下界的平均值作为排列图子图可靠性的近似值。在算法 1 的计算过程中会有鲁棒性问题,针对这一问题,本文提出了基于排列图的蒙特卡罗模拟算法,利用蒙特卡罗去计算  $A_{3,2}$  的排列图子图的可靠性,其误差不足 1%。对于其他排列图的可靠性,蒙特卡罗算法也优于已知的近似算法。

### 参考文献:

- [1] LIN L, XU L, ZHOU S, *et al.* The reliability of subgraphs in the arrangement graph[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2015, 64(2): 807-818.
- [2] CHIANG W K, CHEN R J. On the arrangement graph[J]. *Information Processing Letters*, 1998, 66(4): 215-219.
- [3] CHENG E, GROSSMAN J W, QIU K, *et al.* The number of shortest paths in the arrangement graph[J]. *Information Sciences*, 2013, 240(11): 191-204.
- [4] FENG K, WANG S Y, ZHANG G Z. Link failure tolerance in the arrangement graphs[J]. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2015, 26(2): 241-254.
- [5] YANG W, LI H, GUO X. A kind of conditional fault tolerance of  $(n, k)$ -star graphs[J]. *Information Processing Letters*, 2010, 110(22): 1007-1011.
- [6] CANCELA H, KHADIRI M E, PETINGI L A. Polynomial-time topological reductions that preserve the diameter constrained reliability of a communication network[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2011, 60(4): 845-851.
- [7] ZHANG Z, AN W, SHAO F. Cascading failures on reliability in cyber-physical system[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2016, 65(4): 1745-1754.

# Approximation Algorithm of Arrangement Graph Reliability in Parallel System

YU Zhongbao, SHAO Fangming

(Department of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

**Abstract:** In parallel system, the arrangement graph  $A_{n,k}$  has good properties such as symmetry, small diameter, and high fault tolerance. Subsystem reliability is defined as the probability that there is still a normal operating subsystem when the system has faults. It is usually used to measure the system health status, and the calculation of subsystem reliability is an NP-hard problem. This paper discusses the robustness of the reliability of the subgraphs and the approximate algorithm of reliability. Further, the Monte Carlo algorithm for arrangement graphs is constructed. The simulation results show that the constructed Monte Carlo algorithm is much better than the known approximation algorithm. In particular, the error of Monte Carlo approximation of  $A_{3,2}$  subgraph reliability is less than 1%.

**Key words:** reliability; arrangement graph; parallel system; approximate algorithm; Monte Carlo